Can. J. Math., Vol. XXXVI, No. 2, 1984, pp. 327-343

SEMIGROUPE DES PARTIES ET RELATIONS DE GREEN

J. E. PIN

1. Introduction. Dans cet article, tous les semigroupes sont supposés finis, sauf dans le cas d'un semigroupe ou d'un monoïde libre. Les références de base sont [**1**, **2**].

L'objet de cet article est de poursuivre l'étude du semigroupe des parties d'un semigroupe, étude qui a connu récemment des développements inattendus [**3**, **4**, **5**, **6**, **8**, **10**, **11**, **12**]. Putcha [**10**] avait caractérisé les semigroupes S tels que le semigroupe des parties $\mathscr{P}(S)$ soit apériodique, autrement dit $\mathscr{H}$-trivial. Je donne ici une nouvelle démonstration du théorème de Putcha basée sur le théorème de Ramsey et je caractérise les semigroupes S tels que $\mathscr{P}(S)$ soit $\mathscr{R}$-trivial (resp. $\mathscr{L}$-trivial, $\mathscr{J}$-trivial): ce sont les semigroupes apériodiques tels que $es = ese$ ($se = ese$, $es = se$) pour tout $s \in S$ et pour tout idempotent $e \in S$. Il en résulte que la variété des semigroupes $\mathbf{V}_2$ (resp $\mathbf{V}_3$, $\mathbf{V}_1$) définie par ces conditions est la variété maximale $\mathbf{V}$ telle que la variété $\mathbf{PV}$ engendrée par les $\mathscr{P}(S)$, $S \in \mathbf{V}$, soit contenue dans la variété des monoïdes $\mathscr{R}$-triviaux ($\mathscr{L}$-triviaux, $\mathscr{J}$-triviaux). Ce résultat a des applications dans l'étude des variétés du type $\mathbf{PV}$ qui sont analysées dans la Section 4. Par exemple je résouds complètement l'équation $\mathbf{PV} = \mathbf{J}$ où $\mathbf{J}$ est la variété des monoïdes $\mathscr{J}$-triviaux (Théorème 4.5) et je donne de nouvelles précisions sur l'itération de l'opérateur $\mathbf{P}$ (Corollaire 4.8, Théorème 4.9).

On retrouve les variétés $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ et $\mathbf{V}_3$ d'un point de vue totalement différent dans la Section 5. Straubing [**13**] a en effet montré que $\mathbf{V}_1$ est engendrée par les semigroupes de la forme S^1 avec S nilpotent (S est nilpotent si $es = se = e$ pour tout $s \in S$ et pour tout idempotent $e \in S$). Je donne une preuve très courte de ce résultat et je montre qu'il existe des résultats analogues pour $\mathbf{V}_2$ et $\mathbf{V}_3$: $\mathbf{V}_2$ (resp. $\mathbf{V}_3$) est engendrée par les semigroupes de la forme S^1, où S satisfait $es = e$ (resp. $se = e$) pour tout idempotent $e \in S$. La preuve, assez longue, utilise les techniques de Straubing [**13**] issues de la théorie des langages.

La dernière section est consacrée à la discussion de quelques problèmes ouverts.

2. Terminologie et notations.

2.1. *Semigroupes.* Si S est un semigroupe on note $E(S)$ l'ensemble de ses

Reçu le 18 octobre 1982 et sous forme revisée le 24 février 1983.

idempotents. Le monoïde S^1 est défini par $S^1 = S$ si S est un monoïde et par $S^1 = S \cup \{1\}$ si S est un semigroupe, 1 étant alors l'élément neutre de S^1. On note $\mathscr{P}(S)$ le semigroupe des parties de S muni du produit usuel des parties: si $A, B \in \mathscr{P}(S)$

$$AB = \{ab | a \in A \quad \text{et} \quad b \in B\}.$$

On note respectivement $\leqq_{\mathscr{J}}$, $\leqq_{\mathscr{R}}$ et $\leqq_{\mathscr{L}}$ les relations de préordre associées aux relations de Green. Ainsi, pour $a, b \in S$

$$\begin{array}{lll} a \leqq_{\mathscr{J}} b & \text{ssi il existe } x, y \in S^1 \text{ tels que } a = xby \\ a \leqq_{\mathscr{R}} b & \text{ssi il existe } x \in S^1 \text{ tel que } a = bx \\ a \leqq_{\mathscr{L}} b & \text{ssi il existe } x \in S^1 \text{ tel que } a = xb. \end{array}$$

On dit qu'un semigroupe est $\mathscr{J}$-trivial (resp. $\mathscr{R}$-trivial, $\mathscr{L}$-trivial, $\mathscr{H}$-trivial) ssi la relation $\mathscr{J}$ (resp. $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{H}$) est l'égalité. Dans ce cas la relation $\leqq_{\mathscr{J}}$ ($\leqq_{\mathscr{R}}$, $\leqq_{\mathscr{L}}$) est une relation d'ordre. Voici une caractérisation utile (pour une preuve, cf par exemple [**5**]).

PROPOSITION 2.1. *Soit S un semigroupe. Si la restriction de $\mathscr{J}$ (resp. $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$) aux $\mathscr{J}$-classes (resp. $\mathscr{R}$-classes, $\mathscr{L}$-classes) régulières de S est triviale, alors S est $\mathscr{J}$-trivial (resp. $\mathscr{R}$-trivial, $\mathscr{L}$-trivial).*

On note BA_2 le semigroupe de Brandt apériodique à 5 éléments. BA_2 est aussi représenté par l'ensemble des 5 matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

muni du produit habituel des matrices.

Si A est un ensemble fini appelé alphabet, on note A^+ (resp. A^*) le semigroupe (monoïde) libre de base A. Les éléments de A^* sont appelés des mots. Le résultat qui suit, conséquence du théorème de Ramsey, a été plusieurs fois redécouvert (pour une preuve, cf par exemple le livre de M. Lothaire, Combinatorics on words, Addison Wesley, (1982), chap. 4).

PROPOSITION 2.2. *Soit S un semigroupe, A un alphabet en bijection avec S et $\varphi : A^+ \to S$ le morphisme surjectif naturel induit par cette bijection. Il existe $n_0 > 0$ tel que tout mot $w \in A^+$ de longueur $n \geqq n_0$ se factorise en $w = xu_1u_2u_3y$ avec $x, y \in A$, $u_1, u_2, u_3 \in A^+$ et*

$$u_1\varphi = u_2\varphi = u_3\varphi = e \in E(S).$$

Eilenberg [**1**] donne une version plus élémentaire de ce résultat. Dans cet énoncé, on note S^n l'ensemble des produits $s_1 \ldots s_n$ avec $s_1, \ldots, s_n \in S$.

PROPOSITION 2.3. *Soit S un semigroupe. Alors $S^n = SE(S)S$ pour tout $n \geqq |S|$.*

Soit A^+ un semigroupe libre sur l'alphabet A et L un *langage* de A^+ (c'est à dire une partie de A^+). On note $S(L)$ le *semigroupe syntactique* de L, quotient de A^+ par la congruence $\sim_L$ définie par:

$$u \sim_L v \text{ ssi pour tout } x, y \in A^* \quad (xuy \in L \Leftrightarrow xvy \in L).$$

Si L est un langage de A^*, on note $M(L)$ le monoïde syntactique de L, quotient de A^* par $\sim_L$.

2.2. *Variétés.* Une variété de semigroupes (resp. monoïdes) est une classe de semigroupes (resp. monoïdes) fermée par passage au sous-semigroupe (sous-monoïde), au semigroupe quotient (monoïde quotient) et par produit direct fini.

On dit qu'un semigroupe S divise un semigroupe T (et on note $S \prec T$) si S est quotient d'un sous-semigroupe de T. La relation "divise" est transitive. Une variété de semigroupes est donc une classe de semigroupes fermée par division et par produit direct fini.

Une variété dont tous les semigroupes sont commutatifs est une *variété commutative.* Une variété non commutative est donc une variété qui contient au moins un semigroupe non commutatif. Voici la liste des variétés utilisées dans cet article.

Variétés de monoïdes.

M la variété de tous les monoïdes

$\mathbf{R}_1$ ($\mathbf{R}_1^r$) la variété des monoïdes idempotents et $\mathscr{R}$-triviaux (idempotents et $\mathscr{L}$-triviaux)

J la variété des monoïdes $\mathscr{J}$-triviaux

A la variété des monoïdes apériodiques (on dit aussi "group-free" en anglais): $S \in \mathbf{A}$ ssi il existe $n > 0$ tel que $x^n = x^{n+1}$ pour tout $x \in S$. Ou encore: $S \in \mathbf{A}$ ssi S est $\mathscr{H}$-trivial.

Variétés de semigroupes.

Nil La variété des semigroupes nilpotents: $S \in \mathbf{Nil}$ ssi S possède un zéro, noté 0, et s'il existe $n > 0$ tel que $s^n = 0$ pour tout $s \in S$.

K ($\mathbf{K}^r$) La variété des semigroupes nil-simples à gauche (à droite) et apériodiques. On a $S \in \mathbf{K}$ ($\mathbf{K}^r$) ssi $es = e$ ($se = e$) pour tout $e \in E(S)$ et $s \in S$.

$\mathbf{K}_1$ ($\mathbf{K}_1^r$) La variété des semigroupes simples à gauche (à droite) et apériodiques. $S \in \mathbf{K}_1$ si S est une bande rectangulaire de taille $1 \times n$ (resp $n \times 1$) pour un certain $n > 0$.

LI La variété des semigroupes localement triviaux. On a $S \in \mathbf{LI}$ ssi pour tout $e \in E(S)$ et $s \in S$, $ese = e$.

DS La variété des semigroupes dont chaque $\mathscr{D}$-classe régulière est un semigroupe.

DA La variété des semigroupes dont chaque $\mathscr{D}$-classe rêgulière est un semigroupe apériodique.

Si **V** et **W** sont deux variétés de semigroupes (ou de monoïdes) on note $\mathbf{V} \vee \mathbf{W}$ la plus petite variété contenant simultanément **V** et **W**. Si **V** est une variété, on note **PV** la variété engendrée par les semigroupes $\mathcal{P}(S)$, $S \in \mathbf{V}$. On pose $\mathbf{P}^2\mathbf{V} = \mathbf{P}(\mathbf{PV})$ et plus généralement $\mathbf{P}^{n+1}\mathbf{V} = \mathbf{P}(\mathbf{P}^n\mathbf{V})$.

3. Semigroupe des parties d'un semigroupe. On doit à Putcha [**10**] le remarquable énoncé suivant:

THÉORÈME 3.1. *Soit S un semigroupe apériodique. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) *$\mathcal{P}(S)$ est apériodique*

(2) *BA_2 ne divise pas S*

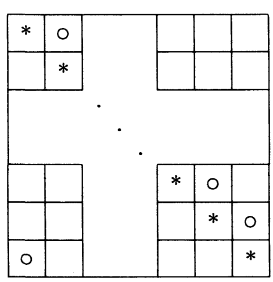
(3) *Si e et f sont deux idempotents d'une même $\mathcal{D}$-classe D de S, alors $ef \in D$ ou $fe \in D$.*

L'équivalence de (2) et (3) est facile à démontrer de même que l'implication (1) $\Rightarrow$ (2). En revanche la démonstration de (3) $\Rightarrow$ (1) n'est pas triviale. J'en donne ci-dessous une preuve entièrement différente de celle proposée par Putcha:

Soit A un alphabet en bijection avec S. Je noterai $u \to \bar{u}$ le morphisme surjectif naturel $A^+ \to S$. D'après la Proposition 2.2 il existe $n_0 > 0$ tel que pour tout mot $w \in A^+$ de longuer $n \geqq n_0$, w se factorise en $w = xu_1u_2u_3y$ avec $x, y \in A^*$, $u_1, u_2, u_3 \in A^+$ et $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = \bar{u}_3 = e \in E(S)$. Posons $u_2 = a_1 \ldots a_k$ (où les a_i sont des lettres). Il est clair que tous les éléments

$$s_{ij} = \overline{a_i \ldots a_k}\, e\, \overline{a_1 \ldots a_{j-1}} \quad (1 \leqq i, j \leqq k)$$

sont dans la même $\mathcal{D}$-classe D. De plus les $s_{ii}(1 \leqq i \leqq k)$ sont des idempotents et $s_{ij} \mathcal{R} s_{i'j'}$, (resp $s_{ij} \mathcal{L} s_{i'j'}$) si $i = i'$ ($j = j'$). Si on représente D sous la forme de la classique boite à oeufs, on a le diagramme suivant où les étoiles représentent des idempotents.



L'étape suivante consiste à montrer que l'un des éléments figuré par un rond est idempotent.

LEMME 3.2. *Il existe $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ avec $j - i \equiv 1 \bmod k$ tels que s_{ij} soit idempotent.*

Par l'absurde supposons que $s_{1,2}$, $s_{2,3} \dots, s_{k-1,k}$ ne soient pas idempotents. Il suffit de vérifier que $s_{k,1}$ est idempotent.

Pour cela je montre par récurrence sur i que $s_{i,1}$ est idempotent pour $1 \leqq i \leqq k$. C'est évident si $i = 1$. Pour le passage de i à $i + 1$, considérons le diagramme

* $s_{i,1}$	$s_{i,i+1}$
$s_{i+1,1}$	* $s_{i+1,i+1}$

Comme $s_{i,i+1}$ n'est pas idempotent par hypothèse, $s_{i+1,1}$ est idempotent (sinon la $\mathscr{D}$-classe ne vérifierait pas la condition (3)). Donc en particulier $s_{k,1}$ est idempotent ce qui prouve le lemme.

i et j étant fixés par le Lemme 3.2, on a d'après le théorème de Green-Rees

(1) $\quad s_{1,j}\, s_{i,1} = s_{1,1} = e.$

Puisque $j \equiv i + 1 \bmod k$, ou bien $j = i + 1$ et d'après (1)

$$e = \overline{ea_1 \dots a_i a_i \dots a_k e}$$

ou bien $j = 1$ et $i = k$ et alors

$$e = ea_k e = \overline{ea_1 \dots a_k a_k e}.$$

On en déduit dans tous les cas que $e = e\bar{u}e$ avec $|u| = k + 1$. Par conséquent

$$\bar{w} = \overline{xu_1u_2u_3y} = \bar{x}e\bar{y} = \bar{x}e\bar{u}e\bar{y} = \overline{xu_1uu_3y} \quad \text{et}$$

$$|xu_1uu_3y| = n + 1.$$

Soit P une partie de S et soit $s \in P^n$ (avec $n \geqq n_0$). Alors il existe $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que $\bar{a}, \dots, \bar{a}_n \in P$ et $s = \overline{a_1 \dots a_n}$. D'après ce qui précède on a aussi $s = \bar{u}$ avec $u \in \{a_1, \dots, a_n\}^{n+1}$. Donc $s \in P^{n+1}$ et par conséquent $P^n \subset P^{n+1}$ pour tout $n \geqq n_0$. Par ailleurs comme $\mathscr{P}(S)$ est un semigroupe fini il existe un entier $n \geqq n_0$ et $r > 0$ tels que $P^n = P^{n+r}$. On a donc

$$P^n \subset P^{n+1} \dots \subset P^{n+r} = P^n$$

d'où $P^n = P^{n+1}$ ce qui montre que $\mathscr{P}(S)$ est apériodique.

Le théorème de Putcha caractérise les semigroupes S tels que $\mathscr{P}(S)$ soit $\mathscr{H}$-trivial. De la même façon on peut caractériser les semigroupes S tels que $\mathscr{P}(S)$ soit $\mathscr{R}$-trivial (resp. $\mathscr{L}$-trivial, $\mathscr{J}$-trivial).

THÉORÈME 3.2. *Soit S un semigroupe apériodique*:

(1) $\mathscr{P}(S)$ *est* $\mathscr{R}$-*trivial ssi pour tout* $s \in S$ *et* $e \in E(S)$, $es = ese$
(2) $\mathscr{P}(S)$ *est* $\mathscr{L}$-*trivial ssi pour tout* $s \in S$ *et* $e \in E(S)$, $se = ese$
(3) $\mathscr{P}(S)$ *est* $\mathscr{J}$-*trivial ssi pour tout* $s \in S$ *et* $e \in E(S)$, $es = se$.

Preuve. La propriété (2) est duale de (1). D'autre part (1) et (2) entrainent (3). En effet si pour tout $s \in S$ et $e \in E(S)$ on a $es = se$, alors $es = ese = se$ et donc $\mathscr{P}(S)$ est simultanément $\mathscr{R}$-trivial et $\mathscr{L}$-trivial donc $\mathscr{J}$-trivial. Réciproquement si $\mathscr{P}(S)$ est $\mathscr{J}$-trivial, $es = ese = se$ (d'après (1) et (2)) pour tout $s \in S$ et $e \in E(S)$.

Il reste à démontrer (1). Pour simplifier je noterai $\leqq$ au lieu de $\leqq_{\mathscr{J}}$ et $x < y$ pour $x \leqq y$ et $x \not\mathscr{J} y$.

Supposons tout d'abord qu'il existe $e \in E(S)$ et $s \in S$ tels que $es \neq ese$. Si S n'est pas $\mathscr{R}$-trivial, $\mathscr{P}(S)$ n'est pas $\mathscr{R}$-trivial puisque S divise $\mathscr{P}(S)$. Si S est $\mathscr{R}$-trivial, on a $ese < es$: en effet si $es\mathscr{J}ese$, il vient $es\mathscr{R}ese$ d'où $es = ese$. Posons $es = t$ et considérons le semigroupe S' de S engendré par e et t.

Soit I l'idéal de S' engendré par te et T le quotient de Rees S'/I. J'affirme que T contient exactement 3 éléments e, t et 0 qui se multiplient suivant les règles $e^2 = e$, $et = t$, $te = 0 = t^2$. En effet on ne peut avoir $e = t$(sinon $es = ese$) ni $e = 0$ ou $t = 0$ (sinon $t \in I$ et $es \leqq ese$). D'autre part $t^2 = eses \in I$ et donc $t^2 = 0$ dans T. Puisque T divise S par construction, $\mathscr{P}(T)$ divise $\mathscr{P}(S)$. Or $\mathscr{P}(T)$ n'est pas $\mathscr{R}$-trivial puisqu'on a les relations

$$\{e, 0\}\{e, t, 0\} = \{e, t, 0\}$$
$$\{e, t, 0\}\{e, 0\} = \{e, 0\}.$$

Donc $\mathscr{P}(S)$ n'est pas $\mathscr{R}$-trivial.

Réciproquement supposons que pour tout $s \in S$ et $e \in E(S)$, $es = ese$. D'après la Proposition 2.1, il suffit de vérifier que la restriction de $\mathscr{R}$ aux $\mathscr{R}$-classes régulières de $\mathscr{P}(S)$ est triviale. Soit donc $A = A^2$ un idempotent de $\mathscr{P}(S)$ et soit $B \in \mathscr{P}(S)$ tel que $A\mathscr{R}B$. Il vient

(1) $\quad AB = B \quad$ et $BC = A$ pour un certain $C \in \mathscr{P}(S)$.

Si $A = \emptyset$ on a immédiatement $A = B = \emptyset$. Je supposerai désormais A non vide. La suite repose sur une série de lemmes.

LEMME 3.3. *Soit* $a \in S$ *et* $e \in E(S)$. *Alors* $a \leqq e$ *ssi* $ae = a$.

Preuve. Si $ae = a$, on a $a \leqq e$. Si $a \leqq e$ il existe $b, c \in S^1$ tels que $bec = a$ d'où $ae = bece = bec = a$.

LEMME 3.4. (a) *Pour tout* $a \in A$ *il existe* $e \in E(A)$ *tel que* $ae = a$.
(b) *Les éléments maximaux de* A *sont idempotents.*

Preuve. (a) Comme $A = A^2$, A est un semigroupe. Donc d'après la Proposition 2.3, on a

$$A = A^n = AE(A)A \quad \text{où } n = |A|.$$

En particulier si $a \in A$ il existe $b, c \in A$ et $e \in E(S)$ tels que $a = bec$. On en déduit $ae = bece = bec = a$.

(b) Soit a maximal dans A. D'après (a) il existe $e \in E(A)$ tel que $ae = a$. On en déduit $a \leqq e$ d'où $a\mathscr{J}e$ d'après la maximalité de a. Comme S est $\mathscr{R}$-trivial, $\mathscr{J} = \mathscr{L}$ et donc en particulier $e\mathscr{L}a$. De plus a est idempotent car les $\mathscr{L}$-classes régulières de S sont constituées d'idempotents.

LEMME 3.5. *Pour tout idempotent maximal e de A, il existe $e' \in E(B)$ tel que $e\mathscr{L}e'$.*

Preuve. D'après (1) il existe $a \in A$, $b, b' \in B$ et $c \in C$ tels que $e = bc$, $b = ab'$. D'après le Lemme 3.4 il existe un idempotent $e' \in A$ tel que $a \leqq e'$. On en déduit $e \leqq b \leqq a \leqq e'$ d'où

$$e\mathscr{J}b\mathscr{J}a\mathscr{J}e'$$

d'après la maximalité de e. On en déduit comme ci-dessus $e\mathscr{L}b$ et b est idempotent.

LEMME 3.6. (a) *A est contenu dans B.*
(b) *Les éléments maximaux de B sont idempotents.*

Preuve. (a) Soit $a \in A$. D'après 3.4, il existe $e_1 \in E(A)$ tel que $a = ae_1$. Soit $e \in E(A)$ un idempotent maximal tel que $e_1 \leqq e$. On a donc $e_1 e = e_1$ d'après 3.3. Enfin d'après 3.5 il existe $e' \in E(B)$ tel que $e\mathscr{L}e'$, et donc $ee' = e$. Il en découle

$$a = ae_1 = ae_1e = ae_1ee' = ae_1e' = ae' \in AB = B.$$

Donc $a \in B$ et $A \subset B$.

(b) Soit b un élément maximal de B. D'après (1) il existe $a \in A$, $b', b'' \in B$ et $c \in C$ tels que $b = ab'$ et $a = b''c$. On a donc $b \leqq a \leqq b''$ et $b\mathscr{L}a\mathscr{L}b''$ d'après la maximalité de b. Si a n'est pas maximal dans A, b n'est pas maximal dans B, puisque $A \subset B$ d'après 3.6 (a) et que $a\mathscr{L}b$. Donc a est maximal dans A donc idempotent d'après 3.4 (b). Puisque $b\mathscr{L}a$ et que S est $\mathscr{R}$-trivial, b est également idempotent.

Pour conclure la preuve du Théorème 3.2, il reste à montrer que B est inclus dans A. Soit $b \in B$ et soit e un idempotent de B tel que $b \leqq e$. L'argument utilisé ci-dessus dans la preuve de 3.6 (b) montre qu'il existe $e' \in A$ tel que $e\mathscr{L}e'$ i.e., $ee' = e$. On a donc

$$b = be = bee' = be'.$$

Puisque $e' \in A$ il existe d'après (1) $b' \in B$ et $c \in C$ tels que $b'c = e'$ d'où $e' \leqq b'$ et $e'\mathscr{L}b'$ d'après la maximalité de e. Donc

$$ec = eb'c = ee' = e$$

et par conséquent

$$b = be = bec = bc \in BC = A.$$

Il en résulte que $A = B$ et $\mathscr{P}(S)$ est $\mathscr{R}$-trivial.

4. Variétés et semigroupes des parties. Dans cette section j'utilise les résultats précédents pour étudier les variétés du type **PV**.

Soit **V** une variété de semigroupes. Un morphisme $\varphi: S \to T$ est un **V**-morphisme si pour tout sous-semigroupe T' de T, $T' \in \mathbf{V}$ entraîne $T' \varphi^{-1} \in \mathbf{V}$. Dans le cas où $\mathbf{V} = \mathbf{A}$ (resp. **LI**), on dit que le morphisme φ est apériodique (resp. localement trivial). Les deux résultats suivants sont supposés connus [**14**].

PROPOSITION 4.1. *Un morphisme $\varphi: S \to T$ est localement trivial ssi pour tout $e \in E(T)$, $e\varphi^{-1}$ est localement trivial.*

PROPOSITION 4.2. *Soit $\varphi: S \to T$ un morphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) *φ est apériodique.*

(2) *Pour tout $e \in E(T)$, $e\varphi^{-1}$ est apériodique.*

(3) *La restriction de φ aux groupes dans S est injective.*

Si $\varphi: S \to T$ est un morphisme, on définit un morphisme $\bar{\varphi}: \mathscr{P}(S) \to \mathscr{P}(T)$ en posant

$$X\bar{\varphi} = \{x\varphi | x \in X\}.$$

Le théorème qui suit, qui étend un résultat de [**3**], précise le lien entre φ et $\bar{\varphi}$.

THÉORÈME 4.3. *Soit $\varphi: S \to T$ un morphisme localement trivial. Alors $\bar{\varphi}: \mathscr{P}(S) \to \mathscr{P}(T)$ est apériodique.*

Preuve. D'après 4.2 il suffit de montrer que la restriction de $\bar{\varphi}$ aux groupes dans $\mathscr{P}(S)$ est injective. Soit G un groupe dans $\mathscr{P}(S)$ de neutre N et soit $X \in G$ tel que $X\bar{\varphi} = N\bar{\varphi}$. Il suffit de prouver que $X = N$.

Soit $e \in E(N)$. Il existe alors $x \in X$ tel que $x\varphi = e\varphi$ et donc

$$(exe)\varphi = e\varphi.$$

Comme φ est localement trivial, il vient

$$e = exe \in NXN = X.$$

Donc $E(N) \subset X$. Soit $n = \text{Card } N$. On a

$$N = N^2 = \ldots = N^n = NE(N)N \subset NXN = X.$$

Par ailleurs $X = XN \subset X^2$ et donc $X \subset X^m$ pour tout $m > 0$. Comme il existe m tel que $X^m = N$, il vient $X \subset N$ d'où $X = N$.

Le théorème précédent permet de simplifier la preuve de la version "variété" du théorème de Putcha (cf [3]). Il faut remarquer que cette version est plus faible que le Théorème 3.1 car les semigroupes qui ne sont pas divisés par BA_2 ne forment pas une variété.

COROLLAIRE 4.4. [3] *Soit* $\mathbf{V}$ *une variété de semigroupes. Les conditions suivantes sont équivalentes*:
(1) $\mathbf{PV} \subset \mathbf{A}$.
(2) $BA_2 \notin \mathbf{V}$ *et* $\mathbf{V} \subset \mathbf{A}$.
(3) $\mathbf{V} \subset \mathbf{DA}$.

On va maintenant traduire en termes de variétés le Théorème 3.2. Pour simplifier les énoncés, je noterai $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ et $\mathbf{V}_3$ respectivement les variétés des semigroupes apériodiques S tels que pour tout $e \in E(S)$ et $s \in S$

(1) $es = se$

(2) $es = ese$

(3) $se = ese$.

THÉORÈME 4.5. *Soit* $\mathbf{V}$ *une variété de monoïdes.*
(a) *On a* $\mathbf{PV} \subset \mathbf{J}$ *ssi* $\mathbf{V} \subset \mathbf{V}_1$
(b) *On a* $\mathbf{PV} = \mathbf{J}$ *ssi* $\mathbf{V}$ *est une variété non commutative contenue dans* $\mathbf{V}_1$.

Preuve. (a) résulte immédiatement du Théorème 3.2(3).
(b) Soit $\mathbf{V}$ une variété non commutative contenue dans $\mathbf{V}_1$. D'après un Théorème de [4], $\mathbf{V}$ contient soit un groupe non commutatif, soit l'un des monoïdes U_2, U_2^r ou $M(\{ab\})$ (monoïde syntactique du langage $\{ab\}$ sur l'alphabet $\{a, b\}$). Les trois premiers cas sont exclus puisque $\mathbf{V} \subset \mathbf{V}_1$ et donc $M(\{ab\}) \in \mathbf{V}$. D'après un résultat de [4], on a alors $\mathbf{J} \subset \mathbf{PV}$ et donc $\mathbf{PV} = \mathbf{J}$ à l'aide de (a).

COROLLAIRE 4.6. *Il existe une infinité non dénombrable de variétés* $\mathbf{V}$ *telles que* $\mathbf{PV} = \mathbf{J}$.

Preuve. Il est en effet montré en [7] que $\mathbf{V}_1$ contient une infinité non dénombrable de variétés non commutatives.

THÉORÈME 4.7. *Soit* $\mathbf{V}$ *une variété de monoïdes*:
(a) $\mathbf{PV} \subset \mathbf{R}$ *ssi* $\mathbf{V} \subset \mathbf{V}_2$.
(b) $\mathbf{PV} \subset \mathbf{R}^r$ *ssi* $\mathbf{V} \subset \mathbf{V}_3$.

Preuve. C'est une conséquence immédiate du Theorème 3.2.

On notera que contrairement à ce qui se passe pour la variété $\mathbf{J}$, on ne sait pas résoudre l'équation $\mathbf{PV} = \mathbf{R}$.

Il est démontré en [4] que pour toute variété de monoïdes non commutative $\mathbf{V}$, on a $\mathbf{P}^3\mathbf{V} = \mathbf{M}$, la variété de tous les monoïdes. Ce résultat amène à poser la définition suivante: on appelle *exposant* d'une variété non commutative $\mathbf{V}$ le plus petit entier n tel que $\mathbf{P}^n\mathbf{V} = \mathbf{M}$. L'exposant d'une variété non-commutative est donc toujours inférieur ou égal à 3. On sait qu'il existe des variétés d'exposant 3 [**5**]: par exemple la variété $\mathbf{R}_1$ des monoïdes idempotents et $\mathscr{R}$-triviaux. On sait également [**3**] que $\mathbf{V}$ est d'exposant $\leqq 1$ ssi $BA_2 \in \mathbf{V}$, où de façon équivalente, si $\mathbf{V} \not\subset \mathbf{DS}$.

La détermination des variétés d'exposant 3 (resp. 2) est encore un problème ouvert. On a toutefois

COROLLAIRE 4.8. *Si* $\mathbf{V}$ *est une variété de monoïdes non commutative contenue dans* $\mathbf{V}_2$ *ou dans* $\mathbf{V}_3$, $\mathbf{V}$ *est d'exposant* 3. *En particulier il existe une infinité non dénombrable de variétés d'exposant* 3.

Preuve. D'après les résultats rappelés ci-dessus il suffit de vérifier que $\mathbf{V}_2$ et $\mathbf{V}_3$ sont d'exposant 3. Or $\mathbf{PV}_2 \subset \mathbf{R}$ et $BA_2 \notin \mathbf{R}$. Donc $\mathbf{R}$ est d'exposant $\geqq 2$ et $\mathbf{V}_2$ est donc d'exposant 3. La démonstration pour $\mathbf{V}_3$ est duale. La seconde partie de l'énoncé résulte du fait, déjà mentionné, que $\mathbf{V}_1$ contient une infinité non dénombrable de variétés.

Le résultat qui suit montre que la frontière entre variétés d'exposant 2 et d'exposant 3 est proche

THÉORÈME 4.9. *La variété* $\mathbf{V}_2 \vee \mathbf{V}_3$ *est d'exposant* 2.

Puisque $\mathbf{V}_2 \subset \mathbf{DS}$ et $\mathbf{V}_3 \subset \mathbf{DS}$, $\mathbf{V}_2 \vee \mathbf{V}_3 \subset \mathbf{DS}$ et donc $\mathbf{V}_2 \vee \mathbf{V}_3$ est d'exposant $\geqq 2$ d'après le résultat rappelé plus haut. Il suffit donc de démontrer que $\mathbf{P}(\mathbf{V}_2 \vee \mathbf{V}_3)$ est d'exposant $\leqq 1$ c'est à dire

$$\mathbf{P}(\mathbf{V}_2 \vee \mathbf{V}_3) \not\subset \mathbf{DS}.$$

La démonstration fait un détour par la théorie des langages. Soient

$$A = \{a, b, c, d, e\} \quad B = \{a, b\}$$

et

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : A^* \to B^*$$

les morphismes définis respectivement par

$$\begin{array}{lll} a\varphi_1 = b\varphi_1 = 1 & c\varphi_1 = a & d\varphi_1 = e\varphi_1 = b \\ a\varphi_2 = b\varphi_2 = b & c\varphi_2 = a & d\varphi_2 = e\varphi_2 = 1 \\ a\varphi_3 = b\varphi_3 = d\varphi_3 = e\varphi_3 = 1 & & c\varphi_3 = a \end{array}$$

Soient enfin

$$L_1 = a^2B^* \quad L_2 = B^*a^2 \quad L_3 = a^3B^*.$$

On sait alors [**1**] que $S(L_1)$, $S(L_3) \in \mathbf{K}$, $S(L_2) \in \mathbf{K}^r$. Il est facile d'en déduire que $M(L_1)$, $M(L_2) \in \mathbf{V}_2$, $M(L_3) \in \mathbf{V}_3$. (Le lien entre $\mathbf{K}$ et $\mathbf{V}_2$ d'une part, $\mathbf{K}^r$ et $\mathbf{V}_3$ d'autre part, sera d'ailleurs précisé dans la section suivante.) Soit

$$L = (L_1\varphi_1^{-1} \cap L_2\varphi_2^{-1})\backslash(L_3\varphi_3^{-1}).$$

Un petit calcul montre que

$$L = \{a, b\}^*c^2\{d, e\}^*.$$

D'autre part d'après [**1**, p 187], on a

$$M(L) \in \mathbf{V}_2 \vee \mathbf{V}_3.$$

Soit $\varphi: A^* \to B^*$ le morphisme défini par

$$a\varphi = c\varphi = d\varphi = a \quad b\varphi = e\varphi = b.$$

On a

$$L\varphi = \{a, b\}^*a^2\{a, b\}^*$$

et d'après un résultat de [**11**, **12**],

$$M(L\varphi) \in \mathbf{P}(\mathbf{V}_2 \vee \mathbf{V}_3).$$

Or le calcul montre que $M(L\varphi)$ contient une $\mathscr{D}$-classe régulière qui n'est pas un semigroupe. Donc

$$M(L\varphi) \notin \mathbf{DS} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(\mathbf{V}_2 \vee \mathbf{V}_3) \not\subset \mathbf{DS},$$

ce qui conclut la preuve.

5. Variétés de semigroupes et variétés de monoïdes. Le théorème des variétés d'Eilenberg [**1**] introduit une distinction subtile entre variétés de semigroupes et variétés de monoïdes. Cela provient du fait que si S est élément d'une variété $\mathbf{V}$, le monoïde S^1 n'est pas nécessairement élément de la même variété. Le passage de S à S^1 est également utilisé dans l'étude de la complexité des semigroupes [**14**].

A chaque variété de semigroupes $\mathbf{V}$ on associe la variété de monoïdes $\mathbf{MV}$ engendrée par les monoïdes S^1, S dans $\mathbf{V}$. Le problème consiste à étudier l'opérateur $\mathbf{M}$ ainsi défini. Voici deux résultats déjà connus.

THÉORÈME 5.1. [**9**] *On a* $\mathbf{MK}_1 = \mathbf{R}_1$ *et* $\mathbf{MK}_1^r = \mathbf{R}_1^r$.

THÉORÈME 5.2. [**13**] *On a* $\mathbf{MNil} = \mathbf{V}_1$.

La démonstration originale de Straubing utilisait la théorie des langages. Voici une démonstration plus simple et plus directe.

Soit $S \in \mathbf{Nil}$. Alors les idempotents de S^1 sont 1 et 0 et commutent avec tout élément de S. Donc $S^1 \in \mathbf{V}_1$ et l'inclusion $\mathbf{MNil} \subset \mathbf{V}_1$ en résulte.

Réciproquement soit $M \in \mathbf{V}_1$. Comme $\mathbf{PV}_1 \subset \mathbf{J}$ d'après le Théorème 4.5, on a a fortiori $\mathbf{V}_1 \subset \mathbf{J}$ et M est $\mathscr{J}$-trivial. Je montre que $M \in \mathbf{MNil}$ par récurrence sur le nombre de $\mathscr{D}$-classes régulières de M. Si $n = 1$, $M = 1$ et le résultat est trivial. Si $n = 2$, $M = S^1$ avec S nilpotent et donc $M \in$ **MNil** par définition. Finalement je suppose $n > 2$. Il existe alors $e \in E(M)$ différent de 1 et de 0 (on note 0 le zéro de M). L'application $\varphi: M \to eM$ définie par $s\varphi = es$ est un morphisme puisque pour tout $s, t \in M$

$$(es)(et) = (ese)t = est.$$

D'autre part comme e commute avec tous les éléments de M, on a $eM = MeM$. Soit π le morphisme

$$M \to M/eM = M/MeM$$

et soit $\alpha: M \to eM \times M/eM$ le morphisme défini par

$$m\alpha = (m\varphi, m\pi) \quad \text{pour tout } m \in M.$$

Je montre que α est injectif. En effet si $s\alpha = t\alpha$ il vient $s\pi = t\pi$ et donc s et t sont simultanément éléments de eM ou de $M \backslash eM$. Dans le premier cas on a $s = s\varphi = t\varphi = t$. Dans le second cas on a aussi $s = t$ puisque la restriction de π à $M \backslash eM$ est injective. On en déduit que M divise $eM \times M/eM$. Or le nombre de $\mathscr{D}$-classes régulières de eM est strictement inférieur à n puisque $1 \notin eM$. De même le nombre de $\mathscr{D}$-classes régulières de M/eM est strictement inférieur à n puisque eM contient e et 0. Comme eM, $M/eM \in \mathbf{V}_1$ on a par récurrence M/eM, $eM \in$ **MNil** d'où $M \in$ **MNil**.

Les variétés $\mathbf{V}_2$ et $\mathbf{V}_3$ sont également de la forme **MV** comme le montre le

THÉORÈME 5.3. *On a* $\mathbf{MK} = \mathbf{V}_2$ *et* $\mathbf{MK}^r = \mathbf{V}_3$.

Je n'ai malheureusement pas réussi à donner une preuve algébrique similaire à la preuve précédente. La preuve que je propose est donc inspirée de la méthode utilisée par Straubing [**13**].

Preuve. Par dualité il suffit d'établir la formule $\mathbf{MK} = \mathbf{V}_2$. Si $S \in \mathbf{K}$, on a $ese = es$ pour tout $e \in E(S)$ et $s \in S$. Puisque $1 \cdot s \cdot 1 = 1 \cdot s$ pour tout s, on a $S^1 \in \mathbf{V}$, ce qui montre l'inclusion $\mathbf{MK} \subset \mathbf{V}_2$. Pour la réciproque, je commence par préciser les équations de $\mathbf{V}_2$.

PROPOSITION 5.4. *Soit M un monoïde. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) $M \in \mathbf{V}_2$.

(2) *Il existe $n > 0$ tel que pour tout $x, y \in M$,*

$$x^n = x^{n+1} \quad et \quad x^n y = x^n y x^n.$$

(3) *Il existe $n > 0$ tel que pour tout $x, y \in M$,*

$$x^n = x^{n+1} \quad et \quad x^n y = x^n y x.$$

(4) *Il existe $n > 0$ tel que M satisfasse les équations $x^n = x^{n+1}$ et $uxy = uyx$ pour tout mot u de longueur n sur l'alphabet $\{x, y\}$.*

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2). Soit $n = |M|$. Comme M est apériodique, M satisfait l'équation $x^n = x^{n+1}$. Tout élément de la forme x^n est donc idempotent et l'équation $x^n y = x^n y x^n$ est une conséquence de la condition $es = ese$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Il suffit d'observer que, d'après (2),

$$x^n yx = x^n yx^{n+1} = x^n yx^n = x^n y.$$

(3) $\Rightarrow$ (4). Je montre d'abord qu'un monoïde qui satisfait (3) est $\mathscr{R}$-trivial. D'après 2.1 il suffit de vérifier que la restriction de $\mathscr{R}$ aux $\mathscr{R}$-classes régulières est triviale.

Soit $e \in E(M)$ et soit $s \in M$ tels que $e\mathscr{R}s$. On a alors compte tenu de (3)

$$s = es = e^n s = e^n se = ese$$

d'où $s = se$ et $e\mathscr{H}s$. Comme M est apériodique, on a $e = s$.

Soit $\alpha:\{x, y\}^* \to M$ un morphisme de monoïdes. Pour simplifier je noterai de manière identique un mot de $\{x, y\}^*$ et son image par α. Soit $k = |M| + 1$ et $u = x_1 \dots x_k$ un mot de longueur k sur l'alphabet $\{x, y\}$. Alors

$$x_1 \, {}_{\mathscr{R}}{\geqq} \, x_1 x_2 \, {}_{\mathscr{R}}{\geqq} \dots {}_{\mathscr{R}}{\geqq} \, x_1 \dots x_k.$$

Comme M a $(k - 1)$ éléments distincts, deux éléments de la suite précédente sont égaux, disons

$$x_1 \dots x_i = x_1 \dots x_i x_{i+1} \dots x_j.$$

Comme M est $\mathscr{R}$-trivial, on en déduit

$$x_1 \dots x_i = x_1 \dots x_i x_{i+1} = x_1 \dots x_i x_{i+1}^n.$$

Supposons $x_{i+1} = x$ (le cas $x_{i+1} = y$ est dual). Il vient, d'après (3)

$$\begin{aligned} uyx &= x_1 \dots x_i x^n x_{i+2} \dots x_k yx = x_1 \dots x_i x^n x_{i+2} \dots x_k y \\ &= x_1 \dots x_i x^n x_{i+2} \dots x_k xy = uxy. \end{aligned}$$

Par ailleurs $x^k = x^{k+1}$ puisque M est apériodique. Donc M vérifie (4).

(4) $\Rightarrow$ (1). Puisque M vérifie l'équation $x^n = x^{n+1}$, M est apériodique. Soit $e \in E(M)$ et $s \in M$. Je définis un morphisme $\alpha:\{x, y\}^* \to M$ par

$$x\alpha = e \quad \text{et} \quad y\alpha = s.$$

Puisque M satisfait l'équation $x^n xy = x^n yx$ (obtenue en prenant $u = x^n$ dans (4)), il vient $e^n es = e^n se$, soit $es = ese$.

Je reviens à la preuve du Théorème 5.3. Puisque tout monoïde fini est quotient d'un monoïde libre de base finie, il existe un alphabet fini A et un morphisme surjectif $\varphi:A^* \to M$. Si B est une partie de A et u un mot de

A^*, je noterai u_B l'image de u par le morphisme $\pi_B: A^* \to A^*$ défini par

$$\begin{cases} a\pi_B = a & \text{si } a \in B \\ a\pi_B = 1 & \text{si } a \in A \backslash B. \end{cases}$$

Pour $n > 0$, on définit une équivalence $\sim_n$ sur A^* par $u \sim_n v$ ssi pour tout $B \subset A$, u_B et v_B ont les mêmes facteurs gauches de longueur $\leqq n$. Il est facile de voir que $\sim_n$ est en fait une congruence dont voici quelques propriétés.

LEMME 5.5. (1) *Si* $u \sim_n v$ *alors* $u \sim_k v$ *pour tout* $k \leqq n$.
(2) *Si* $u \sim_n v$ *alors* $u_B \sim_n v_B$ *pour toute partie* B *de* A.
(3) *Si* $|u| \leqq m \leqq n$, $uu_1 \sim_n uu_2$ *entraine* $u_1 \sim_{n-m} u_2$.

Preuve. (1) est évident.
(2) Soit $B' \subset A$. Alors

$$u\pi_{B'} = u_{B \cup B'} = u\pi_{B \cup B'}.$$

De même

$$v_B\pi_{B'} = v\pi_{B \cup B'}.$$

Donc $u_B\pi_{B'}$ et $v_B\pi_{B'}$ ont les mêmes facteurs gauches de longueur $\leqq n$.
(3) Soit $B \subset A$. Alors

$$(uu_1)\pi_B = (u\pi_B)(u_1\pi_B) \quad \text{et} \quad (uu_2)\pi_B = (u\pi_B)(u_2\pi_B)$$

ont les mêmes facteurs gauches de longueur $\leqq n$. Comme $|u\pi_B| \leqq m$, $u_1\pi_B$ et $u_2\pi_B$ ont les mêmes facteurs gauches de longueur $n - m$.

Je pose $m = |M| + 1$, $k = |A| + 1$ et $n = km$. On va montrer que si $u \sim_n u'$ alors $u\varphi = u'\varphi$. Tout d'abord si $|u| < n$ (resp. $|u'| < n$), on a $u = u'$ et le résultat est évident. On suppose donc désormais $|u| \geqq n$ et $|u'| \geqq n$. Un argument sur l'ordre $\leqq_{\mathscr{R}}$ déjà utilisé dans la preuve de la Proposition 5.4 montre que tout mot v de longueur m se factorise en v_1av_2 avec $a \in A$, $v_1, v_2 \in A^*$ et $v_1\varphi = (v_1a)\varphi$. Ceci permet de définir par récurrence une suite de mots u_i de la façon suivante.
(a) $u_0 = u$.
(b) Si $|u_i| < m$ la suite s'arrête.
Sinon $u_i = f_ia_ig_i$ avec $a_i \in A, f_i, g_i \in A^*$ et où f_ia_i est le facteur gauche de u_i le plus court tel que

$$f_i\varphi = (f_ia_i)\varphi.$$

(D'après l'observation ci-dessus, on a nécessairement $|f_ia_i| \leqq m$). Enfin on pose $u_{i+1} = (g_i)_{\{a_i\}}$ c'est à dire que u_{i+1} se déduit de g_i en supprimant toutes les occurrences de a_i. On définit de manière analogue une suite u'_i en partant de $u'_0 = u'$. Soit p tel que M satisfasse l'équation $x^py = x^pyx$. Il vient

$$u_i = (f_i a_i g_i)\varphi = (f_i g_i)\varphi \quad \text{d'où}$$
$$u_i = (f_i a_i^p g_i)\varphi = (f_i a_i^p u_{i+1})\varphi$$

puisque si $g_i = g_i' a_i g_i''$ on a

$$(a_i^p g_i' a_i)\varphi = (a_i^p g_i')\varphi$$

d'après l'équation $x^p y = x^p yx$.

On obtient donc

$$u_i\varphi = (f_i a_i^p u_{i+1})\varphi = (f_i u_{i+1})\varphi$$

d'où par récurrence

$$u\varphi = (f_0\varphi)(f_1\varphi)\ldots(f_{j-1}\varphi)(u_j\varphi)$$

où u_j est le dernier terme de la suite. On a de même avec des notations évidentes

$$u'\varphi = (f'_0\varphi)(f'_1\varphi)\ldots(f'_{j'-1}\varphi)(u'_{j'}\varphi).$$

Pour établir l'égalité $u\varphi = u'\varphi$ il suffit maintenant de démontrer les égalités $j = j'$, $f_i = f'_i$ pour $0 \leqq i \leqq j - 1$ et $u_j = u'_j$. Pour cela on montre par récurrence sur i que pour $0 \leqq i \leqq j$, on a les deux propriétés suivantes

$$\text{(c)} \quad i \leqq j' \quad \text{(d)} \quad u_i \sim_{(k-i)m} u'_i.$$

Tout d'abord, puisque $g_i \in (A\backslash\{a_0, \ldots, a_i\})^*$, si u_{k-1} est défini, on a nécessairement

$$g_{k-2} \in (A\backslash\{a_0, \ldots, a_{k-2}\})^* = \emptyset^*$$

(puisque $|A| = k - 1$) et donc $g_{k-2} = 1$ et $u_{k-1} = 1$. Ceci montre que la suite des u_i a au plus k éléments et donc $j \leqq k - 1$.

Pour $i = 0$ la condition (c) est triviale et la condition (d) se ramène à l'hypothèse $u \sim_n u'$. Je suppose que (c) et (d) sont satisfaites pour $i < j \leqq k - 1$. Alors $u_i \sim_m u'_i$ d'après 5.5 puisque

$$u_i \sim_{(k-i)m} u'_i$$

d'après (d) et $(k - i) \geqq 1$. Comme $i < j$, le mot u_i est de longueur $\geqq m$ et il en est donc de même pour u'_i. On en déduit $i + 1 \leqq j'$ puisque u'_i a un successeur. D'autre part la condition $u_i \sim_m u'_i$ entraine $f_i = f'_i$ et $a_i = a'_i = a$. Comme $u_i \sim_{(k-i)m} u'_i$, on a d'après le Lemme 5.5

$$(u_i)_{\{a\}} = (f_i)_{\{a\}}(g_i)_{\{a\}} \sim_{(k-i)m} (f'_i)_{\{a\}} \cdot (g'_i)_{\{a\}} = (u'_i)_{\{a\}}.$$

Or $(f_i)_{\{a\}} = (f'_i)_{\{a\}}$ est un mot de longueur $\leqq m$. Donc d'après le Lemme 5.5, on a

$$u_{i+1} = (g_i)_{\{a\}} \sim_{(k-i-1)m} (g'_i)_{\{a\}} = u'_{i+1}$$

ce qui achève la récurrence.

Ce qui précède montre que $j \leqq j'$. Un argument dual montrerait que $j' \leqq j$. Donc $j = j'$. D'autre part comme on l'a vu ci-dessus la condition (d) entraine $f_i = f'_i$ pour $0 \leqq i < j$ et $u_j \sim_m u'_j$. Mais u_j et u'_j sont des mots de longueur $< m$ et donc $u_j = u'_j$. Il en résulte comme annoncé $u\varphi = u'\varphi$.

Puisque $u \sim_n v$ entraîne $u\varphi = v\varphi$, il existe un morphisme surjectif de $A^*/\sim_n$ sur M. Il reste à montrer que

$$A^*/\sim_n \in \mathbf{MK}.$$

Soit E l'ensemble des couples (u, B) tels que $|u| \leqq n$ et $B \subset A$. Pour $(u, B) \in E$, on pose

$$L_{u,B} = (uA^*)\pi_B^{-1}$$

et on note $\sim_{u,B}$ la congruence syntactique de $L_{u,B}$. Si $u_1 \sim_{u,B} u_2$ on a en particulier

$$u_1 \in (uA^*)\pi_B^{-1} \quad \text{ssi} \quad u_2 \in (uA^*)\pi_B^{-1}$$

et donc

$$u_1\pi_B \in uA^* \quad \text{ssi} \quad u_2\pi_B \in uA^*.$$

Il en résulte que si $u_1 \sim_{u,B} u_2$ pour tout $(u, B) \in E$, alors $u_1 \sim u_2$. En termes de monoïdes cela se traduit par la relation

$$A^*/\sim_n \prec \prod_{(u,B)\in E} M(L_{u,B}).$$

Or d'après [**1**, p 187] on a

$$M(L_{u,B}) \prec M(uA^*).$$

Or on sait [**1**] que $S(uA^*) \in \mathbf{K}$ et donc

$$M(uA^*) = S^1(uA^*) \in \mathbf{MK}.$$

On en déduit $A^*/\sim_n \in \mathbf{MK}$ et finalement $M \in \mathbf{MK}$ puisque M divise $A^*/\sim_n$.

6. Problèmes ouverts. On connait au moins deux extensions du théorème de Putcha (Théorème 3.1). La première est due à Putcha [**10**] et la seconde à Margolis [**3**]. Il serait intéressant de démontrer ces énoncés par une méthode analogue à la démonstration du Théorème 3.1 donnée ici. Je n'y suis pas parvenu jusqu'à présent.

Diverses questions sur les variétés du type **PV** demeurent ouvertes. Tout d'abord le problème, déjà mentionné, de l'exposant d'une variété de monoïdes. Un autre problème, lié à la détermination de l'exposant, est le suivant: quelles sont les variétés **V** telles que $\mathbf{P}^2\mathbf{V} = \mathbf{PJ}$? Voici un dernier problème. On sait qu'il existe une infinité non dénombrable de variétés non commutatives apériodiques. Parmi celles-ci, quelles sont celles qui sont de la forme **PV**? Sont-elles en nombre fini? dénombrable?

Il reste également à résoudre un curieux problème sur les variétés du type **MV**. Soit **LI** la variété des semigroupes localement triviaux (i.e., les semigroupes S tels que $ese = e$ pour tout $e \in E(S)$ et $s \in S$: ce sont, de façon équivalente, les semigroupes nil-simples apériodiques). Il est facile de voir que $\mathbf{LI} = \mathbf{K} \vee \mathbf{K}^r$ et par conséquent que

$$\mathbf{MLI} = \mathbf{MK} \vee \mathbf{MK}^r = \mathbf{V}_2 \vee \mathbf{V}_3:$$

MLI est donc la variété considérée au Théorème 4.9. Le problème est de caractériser les monoïdes de **MLI**. Compte tenu du Théorème 4.3 on peut penser que la caractérisation cherchée est

$$(*) \qquad esete = este \text{ pour tout } e \in E(S) \text{ et } s, t \in S.$$

On démontre sans difficulté que tout monoïde de **MLI** satisfait la condition (*) mais la réciproque n'est pas vraie.

Bibliographie

1. S. Eilenberg, *Automata, languages and machines*, Vol B (Academic Press, 1976).

2. G. Lallement, *Semigroups and combinatorial applications* (Wiley, New York, 1979).

3. S. W. Margolis, *On M-varieties generated by power monoids*, Semigroup Forum *22* (1981), 339-354.

4. S. W. Margolis et J. E. Pin, *Minimal noncommutative varieties and power varieties*, à paraître dans Pacific Journal of Math.

5. J. E. Pin, *Varietés de langages et monoïde des parties*, Semigroup Forum *20* (1980), 11-47.

6. ——— *Variétés de langages et variétés de semigroupes*, Thèse, Paris (1981).

7. J. E. Pin et H. Straubing, *Remarques sur le dénombrement des variétés de monoïdes finis*, C.R. Acad. Sc. Paris t. *292* (1981), Série I, 111-113.

8. ——— *Monoïds of upper-triangular matrices*, à paraitre.

9. J. E. Pin, H. Straubing et D. Thérien, *Small varieties of finite semigroups and extensions*, à paraître dans J. Austral. Math. Soc.

10. M. S. Putcha, *Subgroups of the power semigroup of a finite semigroup*, Can. J. Math. *31* (1979), 1077-1083.

11. Ch. Reutenauer, *Sur les variétés de langages et de monoïdes*, 4th GI Conference. Lect. Notes in Comp. Sc. *67* (Springer, 1979), 260-265.

12. H. Straubing, *Recognizable sets and power sets of finite semigroups*, Semigroup Forum *18* (1979), 331-340.

13. ——— *The variety generated by finite nilpotent monoids*, Semigroup Forum *24* (1982), 25-38.

14. B. Tilson, Chapitres 11 et 12 de la référence **1** (1976).

Université Paris VI et C.N.R.S.,
Paris, France